

Software Implementation of SVD based on Jacobi algorithm

基於Jacobi演算法之SVD軟體實現

組別： A224 組員： 莫明勳、王向梵 指導教授： 翁詠祿

摘要

2020年，5G通訊成功推入人們的生活。為了預計在2030年推行的下一世代的6G通訊，基於低軌道衛星之通訊技術，是未來第六代通訊系統中的關鍵環節之一。考量到部屬至衛星酬載時，須優先採納低能耗、低複雜度的架構，故實驗室採用介於純類比與純數位波束成形的架構，即混合波束成形(Hybrid Beamforming)。

本專題基於實驗室之前的基礎，為了取得optimal precoder，針對通道矩陣之奇異值分解(Singular Value Decomposition, SVD)，以獲取右奇異矩陣(Right-singular-matrix)，做為理想預編碼器矩陣Fopt為一必要之過程，然隨著巨量多輸入多輸出(massive MIMO)概念之引入，其通道陣列之維度將會隨天線陣列之大小而上升，於LEO酬載以傳統硬體實現SVD的複雜度極為困難。故在本專題，我們將透過軟體比較多個SVD演算法，進行運算精準度、CORDIC硬體實作的可行性上探討期望減少SVD分解之複雜度並優化上述演算法於硬體實現上的限制。

原理介紹

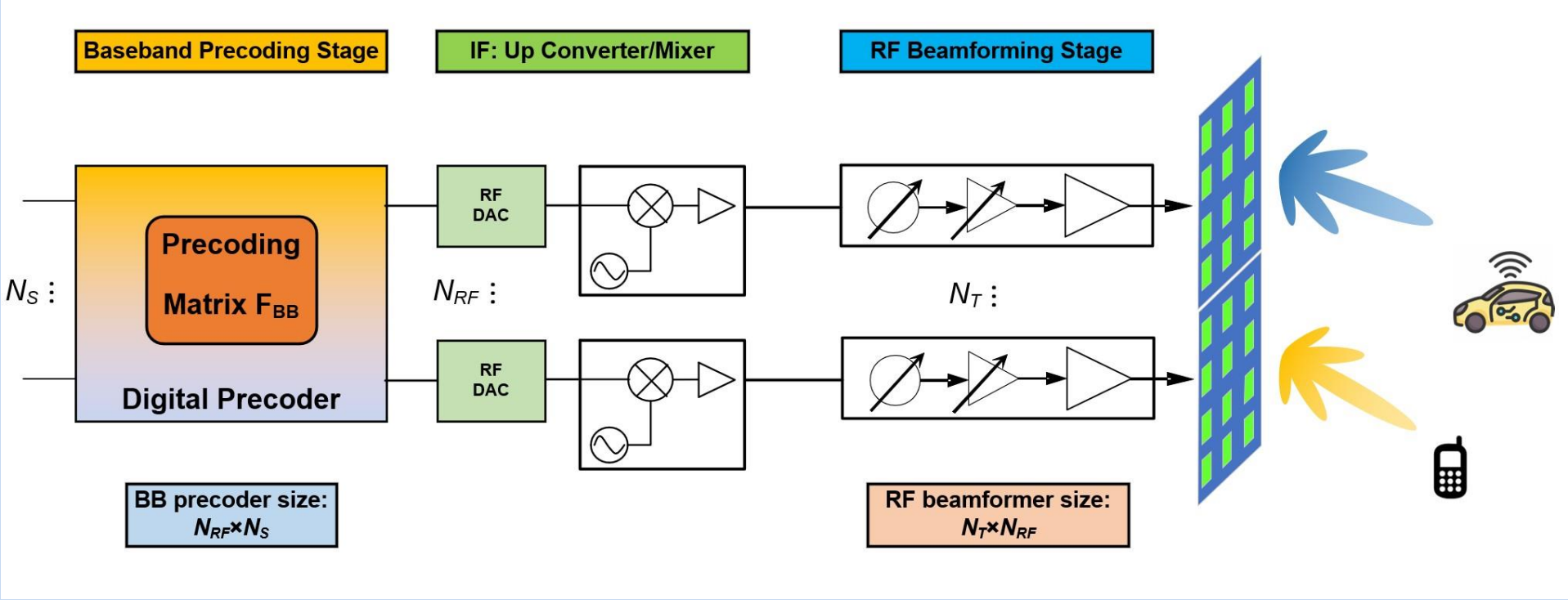


Fig1. 混合波束成形架構圖

SVD分解是相當有效之矩陣分解技術，在混合波束成形的架構中，我們透過SVD分解通道矩陣**H**並取得其前右奇異值向量，作為設計過程中的理想預編碼器。

(A)雙邊雅可比(Two-sided Jacobi)演算法:

首先由對矩陣**A**進行奇異值分解(SVD)的通式，

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$$

其中正交矩陣**V**為**A**的右奇異向量

首先，選擇一個雅可比旋轉矩陣**J**=**G**^T:

$$G(p,q,\varnothing)=\begin{matrix} & & p & & q \\ p & \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \cos\varnothing & \sin\varnothing \\ & & -\sin\varnothing & \cos\varnothing \\ q & & & & 1 \end{bmatrix} & & \end{matrix}$$

雅可比旋轉矩陣可以把*p*、*q*行列上的四個元素進行交換，使非對角線上的元素**A**_{*p,q*}化成0。其中的旋轉角度**∅**的公式則為:

$$\text{Cot}(2\varnothing)=\frac{A_{q,q}-A_{p,p}}{2A_{p,q}}$$

矩陣**A**透過右連乘**J**(*p*, *q*, **∅**)把上對角線元素全歸零，並透過左連乘**J**^T(*p*, *q*, **∅**)則是把下對角線元素歸零，使得**A**為一個對稱矩陣，**A**_{*i,j*} = **A**_{*j,i*}。

上述之過程可以表示為:

$$J_k^T \dots J_2^T J_1^T (A^T A) J_1 J_2 \dots J_k = \Lambda = \Sigma^2$$

因此，右奇異矩陣即為**V**=**J**₁**J**₂ ... **J**_{*k*}。

(B)座標旋轉數字計算機(Coordinate Rotation Digital Computer, CORDIC):

CORDIC乃由遞迴的旋轉以及一系列提前固定的角度集合組成，這些角度之順序關係可表示為

$$\varnothing_i=\tan^{-1}(2^{-i});\text{ for }i=0,1,2,\dots$$

目標向量是透過原始向量乘上旋轉矩陣所得，如以下所示

$$\begin{matrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{matrix}=\begin{matrix} x_i \\ y_i \end{matrix}\begin{bmatrix} \cos\varnothing & -\sin\varnothing \\ \sin\varnothing & \cos\varnothing \end{bmatrix}=\prod_i\begin{bmatrix} \cos\varnothing_i & -\sin\varnothing_i \\ \sin\varnothing_i & \cos\varnothing_i \end{bmatrix}\begin{matrix} x_i \\ y_i \end{matrix}$$

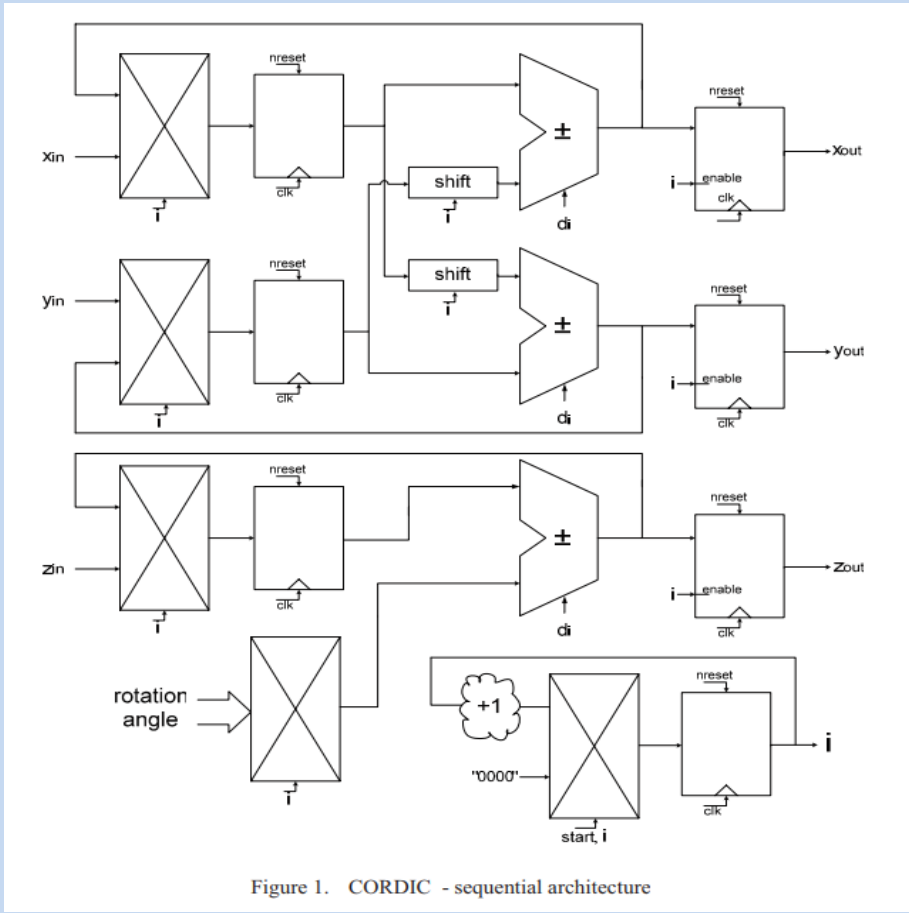


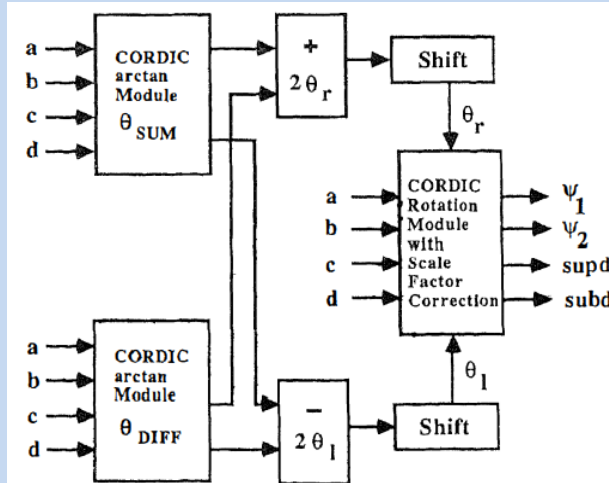
Figure 1. CORDIC - sequential architecture

原理結合

給定一大小2x2的矩陣**M**= $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 為例，所需旋轉的角度為argtan($\frac{c+b}{d-a}$)，每一次的旋轉需要用到CORDIC。

$$\begin{cases} x_{i+1}=x_i+\delta_i*SHIFT_i(y_i) \\ y_{i+1}=y_i-\delta_i*SHIFT_i(x_i) \end{cases}$$

其中的**∂_i** = +1/-1，分別為向左或向右轉
右圖為CORDIC SVD 平行處理之分解模塊



實驗結果

隨意輸入一矩陣(以4*4矩陣為例):

a			
[0, 0]: 1.41421	[0, 1]: 2.23607	[0, 2]: 3.16228	[0, 3]: 4.12311
[1, 0]: 2.23607	[1, 1]: 2.82843	[1, 2]: 3.60555	[1, 3]: 4.47214
[2, 0]: 3.16228	[2, 1]: 3.60555	[2, 2]: 4.24264	[2, 3]: 5.00000
[3, 0]: 4.12311	[3, 1]: 4.47214	[3, 2]: 5.00000	[3, 3]: 5.65685

依序為得到的右奇異矩陣**V**及以遞減方式排列的特徵值:

v =			
[0, 0]: 0.37258	[0, 1]: 0.43849	[0, 2]: 0.52602	[0, 3]: 0.62626
[1, 0]: -0.75607	[1, 1]: -0.31528	[1, 2]: 0.13455	[1, 3]: 0.55755
[2, 0]: 0.51686	[2, 1]: -0.60909	[2, 2]: -0.39672	[2, 3]: 0.45220
[3, 0]: 0.14968	[3, 1]: -0.58080	[3, 2]: 0.74014	[3, 3]: -0.30407

s =			
[0, 0]: 15.44083	[0, 1]: 1.25660	[0, 2]: 0.04082	[0, 3]: 0.00128

[1] N. D. Hemkumar and J. R. Cavallaro, "A systolic VLSI architecture for complex SVD," [Proceedings] 1992 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 1992, pp. 1061-1064 vol.3, doi: 10.1109/ISCAS.1992.230297.

[2] Brent, R.P., & Luk, F.T. (1985). The Solution of Singular-Value and Symmetric Eigenvalue Problems on Multiprocessor Arrays. Siam Journal on Scientific and Statistical Computing, 6, 69-84.

[3] P. M. Szczówka and P. Malinowski, "CORDIC and SVD implementation in digital hardware," Proceedings of the 17th International Conference Mixed Design of Integrated Circuits and Systems - MIXDES 2010, 2010, pp. 237-242.

[4]SVD: Arthur V. Ratz, Singular Values Decomposition (SVD) In C++11 By An Example

[5]SVD: Krishnan Srinivasan, CPSC 440 Numerical Computation Assignment: Implementing Jacobi method to calculate SVD in C