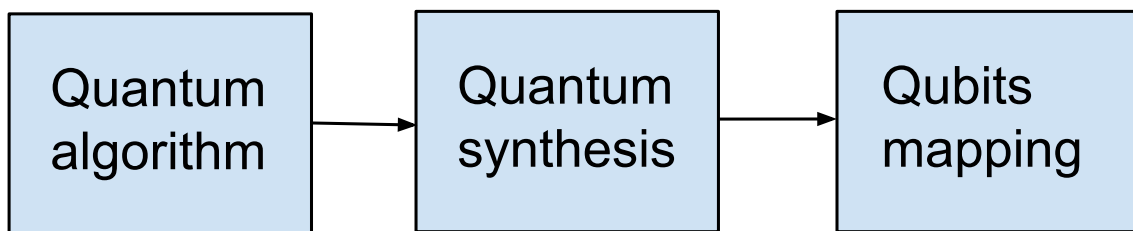


# A research on Synthesis/Decomposition for Quantum circuit

組別: B262 指導教授: 林瀚介 教授 組員姓名: 邱崇喆

## 摘要與背景

量子計算可能會對未來科技產生重大影響，但如今通用量子電腦的實現卻有許多困難，其中一個難題是如何將量子閘分解/合成，這個問題類似於傳統電腦的logic synthesis。



對於評估通用量子計算機的可行性，可用的qubit數量是一大考量，因此探討量子計算機的candidates如Trapped ion或是superconductor quantum computer的qubit數是否能scaling up是現今科學家的努力方向。而隨著技術不斷突破可用的qubit數量不斷上升，quantum circuit將更加龐大與複雜，由quantum synthesis產出可行長度的電路也日益重要，從這個角度觀察，quantum synthesis或許也是評估當前通用量子計算機是否可行的方式。

另一熱門研究題目為不同架構下qubits在物理上的連接性的影響，科學家們使用連通圖connectivity graph表示一個量子計算機qubits的連結，如fig. 2示。當量子電路有multiqubit gate參與時我們必需謹慎地考慮抽象電路中qubits該mapping到connectivity graph的哪個位置，即layout，因為若multiqubit gate作用的qubits在物理上不連結在一起，則必須使用SWAP使它們處在連結一起的位置。

## 研究動機與研究目的

傳統電路與量子電路的運算方法之差異導致兩者的合成演算法截然不同，此專題之動機即為對於量子電路與傳統電路合成之差異，以及量子計算機其是否能以合理的circuit depth執行演算法之好奇，因此在專題中我將探討量子電路合成的發展及探索其遇到的難題。

## 研究內容

在專題裡我閱讀許多paper，發現這個題目牽涉到許多數學，甚至必須考量到量子計算機的物理架構下的qubit connectivity。量子閘為么正矩陣，根據定義有無限多種可能，但是量子計算機不可能執行這無限多種的量子閘，而是被設計成只能執行

特定的量子閘指令集或是量子閘library，意即假設我們想要執行任意一個quantum gate，那就必須將之分解成能透過一量子電腦的指令集可執行的量子閘，抑或是分解成特定的指令集instruction set接著再轉換這些量子閘到量子電腦可執行的閘。

$$\sigma_0 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{and } \sigma_3 = Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Synthesis algorithm}} XYZ$$

fig.1 a simple example of  $2 \times 2$  matrix exact synthesis

Quantum synthesis又被分為exact以及approximate synthesis，兩者的差異在於量子閘是否由量子閘指令集以完美精度合成，然而exact synthesis不一定能被有效達成，因為在給定的量子閘指令集下可能需要非常長的circuit depth才能達到完美精度。fig.1為一個簡單的exact synthesis的例子。幸運的是，著名的Solovay Kitaev theorem告訴我們可以有效率地approximate任一量子閘到任意精度而不耗費過多成本。然而，雖然我們可以透過設定不完美的精度來漸少circuit depth，approximate synthesis不完美的精度卻也造成了計算上的不準確，因為本質上合成出的與原來的gate不同，這對於擁有在物理上本來就不精確的量子閘之量子電腦來說是個取捨。

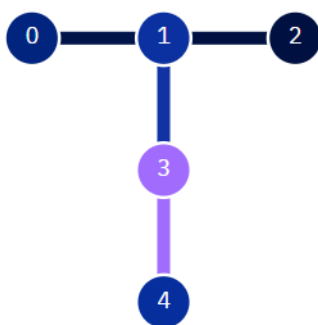


fig.2 量子計算機ibmq\_quito之connectivity graph [1]

fig.1的例子是屬於(N=1)single qubit exact synthesis，然而，在quantum circuit中我們會使用到作用在兩個qubits(N $\geq$ 2)以上的量子閘，它們被稱為multiqubit gate，在矩陣表示上比起single qubit gate更大且更加複雜，可以想像分解它們更加困難。

Quantum synthesis方法大致分為：由線性代數方法分解矩陣、選定一量子閘指令集並分析其代數性質以合成矩陣、考慮到qubit connectivity的合成。在專題報告中，我將介紹幾個被提出的典型範例。

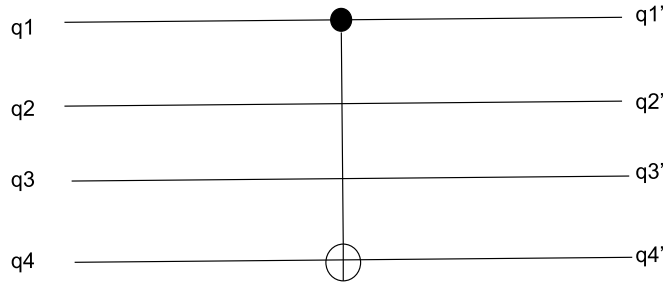


fig. 3 CNOT<sub>14</sub> GATE

另外，對於multiqubit gate如fig. 3之CNOT來說，q1與q4實際上不一定相鄰。同一電路在不同的connectivity可能會有不同circuit depth，其抽象電路中的qubits如何mapping到實際物理架構上的絕對位置是決定插入SWAP gate多寡的重要因素，若選擇不佳的layout(mapping)，SWAP gate的插入可能嚴重影響到circuit depth。在專題報告中，我實作4-qubit Deutsch - Jozsa algorithm觀察不同qubit layout下的circuit depth差異。

## 結論

許多被提出的演算法並不實際，如 [2] 在於合成結果與演算法效率都不實際。synthesis結果通常不具規律性且難以看出其instruction set的結構的關係，然而 [3, 4] 中M-A normal form其正規表示式與instruction set之結構相關且出規律性，是個有趣的結果且較實際。除了M-A normal form之外，還有許多對於{Clifford, T}架構的研究與應用 [5, 6, 7]，顯示此集合的重要性。另外，值得一提IBM Qiskit與Google Cirq使用 [8] 進行two-qubit gate decomposition。

另外，許多合成演算法如 [9, 10, 11, 12] 都沒考慮到目標架構connectivity，往往假設all-to-all connectivity，我們會因為mapping而附加許多SWAP閘。為了解決這個問題，開始有研究人員提出topology aware synthesis，如 [13] 研究人員利用A\*演算法與approximate synthesis中常用到的distance  $D(U, V)$ 貪婪地尋找每一層的最佳參數，這些參數運用於每一層參數化的single qubit gate及multiqubit gates，透過限制演算法multiqubit gates的位置，我們可以不必考慮mapping時增加額外的SWAP閘。Topology aware synthesis的出現也代表SWAP insertion不容忽視，或許在synthesis階段就考慮connectivity是未來發展的方向。

總的來說，Quantum synthesis面臨的難題除了circuit depth太長、演算法效率差之外，還得考慮連結性，種種還需要數學家、物理學家及計算機專家的合作解決。但我認為因為這些難題的存在，Quantum synthesis成為有趣的研究題目，可以從中學習許多數學、計算機知識，且我們可以由它評估是否能產出合理、可行的量子電路，甚至評估通用量子計算機的可行性。

## 心得

量子計算領域相較於許多EECS的研究領域較新，研究資源相對少也難入門，而這個題目大概在近十年來漸漸有許多研究人員的投入，卻遇到許多困難如演算法結果的circuit depth太差、connectivity的問題，導致許多耗費多時研究的演算法無法放到實際的量子計算機上執行。要挖掘能夠實際運用的演算還需要多方專家的合作、討論。種種讓我研究時相當吃力，且缺乏數學背景的我須要花時間才能看懂paper的內容。

在做專題時遇到了種種問題，從研究方法的不了解到看不懂論文的內容，許多都是和實驗室的學長以及老師討論才得到結果。此外，我積極地尋找國內外可用的資源，如寄信尋求科技部以及相關領域的學者們的建議，我在短時間內了解台灣在量子計算領域的發展及我能聯繫哪些人尋求幫助，雖然現在我在這領域能發揮的不多，但過程中我學到溝通的重要，踏出安穩的舒適圈與外界接觸，學習人與人之間的配合、交換意見。

感謝林瀚仝老師在題目的選擇與研究方向給予我的彈性，讓我可以選擇學習自己感興趣的項目，隨著專題進行，我能夠更有效率地閱讀文獻，且了解如何找到能解決想了解的問題的文獻。另外，也感謝實驗室學長的幫忙。

## 參考文獻

- [1] IBM. (n.d.). Compute resources-System profile of ibmq\_quito . Retrieved November 28, 2022, from [https://quantum-computing.ibm.com/services/resources?tab=systems&search=qu&system=ibmq\\_quito](https://quantum-computing.ibm.com/services/resources?tab=systems&search=qu&system=ibmq_quito).
- [2] B. Giles and P. Selinger. Exact synthesis of multiqubit Clifford+T circuits. *Physical Review A*, 87:032332, 2013. Also available from arXiv:1212.0506.
- [3] Ken Matsumoto and Kazuyuki Amano. Representation of quantum circuits with Clifford and  $\pi/8$  gates. *ArXiv Preprint ArXiv:0806.3834*, 2008.
- [4] Brett Giles and Peter Selinger. Remarks on Matsumoto and Amano’s normal form for single-qubit Clifford+ T operators. *ArXiv Preprint ArXiv:1312.6584*, 2013.
- [5] Neil J. Ross and Peter Selinger. Optimal ancilla-free Clifford+ T approximation of z rotations. *ArXiv Preprint ArXiv:1403.2975*, 2014.
- [6] Matthew Amy, Andrew N. Glaudell, and Neil J. Ross. Number-theoretic characterizations of some restricted Clifford+ T circuits. *Quantum*, 4:252, 2020.
- [7] Vadym Kliuchnikov, Alex Bocharov, and Krysta M. Svore. Asymptotically optimal topological quantum compiling. *Physical Review Letters*, 112(14):140504, 2014.
- [8] R. R. Tucci, “An Introduction to Cartan’s KAK Decomposition for QC Programmers,” *arXiv e-prints*, pp. quant-ph/0507171, Jul 2005.
- [9] Simon Forest, David Gosset, Vadym Kliuchnikov, and David McKinnon. Exact synthesis of single-qubit unitaries over Clifford-cyclotomic gate sets. *Journal of Mathematical Physics*, 56(8):082201, 2015.
- [10] Alex Bocharov, Yuri Gurevich, and Krysta M. Svore. Efficient decomposition of single-qubit gates into v basis circuits. *Physical Review A*, 88(1):012313, 2013.

- [11] Neil J. Ross. Optimal ancilla-free Clifford+  $v$  approximation of  $z$ -rotations. *Quantum Information and Computation*, 15(11–12):932–950, 2015.
- [12] Andrew N. Glaudell, Neil J. Ross, and Jacob M. Taylor. Optimal two-qubit circuits for universal fault-tolerant quantum computation. *ArXiv Preprint ArXiv:2001.05997*, 2020.
- [13] M. G. Davis, E. Smith, A. Tudor, K. Sen, I. Siddiqi, and C. Iancu. Towards optimal topology aware quantum circuit synthesis. In *2020 IEEE International Conference on Quantum Computing and Engineering (QCE)*, pages 223–234, 2020.