

國立清華大學 電機工程學系

實作專題研究成果摘要

Toward Fast and Scalable Decoder  
Hardware for Tailor-Made Quantum  
Error Correction Codes

快速且具擴展性的硬體解碼器  
以面向特定的量子錯誤更正碼

專題領域：通訊領域

組 別：A519

指導教授：張鑑元 助理教授

組員姓名：黃柏霖 (Huang, Bo-Lin)、江承瀚 (Chiang, Cheng-Han)

研究期間：113 年 7 月 1 日至 114 年 4 月 30 日止，共 10 個月

## Abstract

This project focuses on the development of fast and scalable hardware decoders for Surface code [1, 2], a strong candidate among many quantum error correction (QEC) code. We begin with the theoretical and simulation-based study of quantum circuits and surface code error correction, including both CSS [1] and XZZX [3] variants. Due to the scalability limitations of Look Up Table (LUT) decoders, our research pivots toward graph-based decoding strategies, especially on Minimum-Weight Perfect Matching (MWPM) [4, 5, 6] and Union Find (UF) [7, 8] algorithms.

We evaluated the performance of various decoding approaches by simulating the actual experimental quantum dataset from Willow [9, 10], made publicly available by Google Quantum AI Lab. The results show that the Weighted UF decoder [8, 11] achieves short-term accuracy comparable to that of optimized MWPM decoders [4, 5, 6], while offering significantly better computational efficiency. Additionally, we implemented a modified UF decoder in Verilog (Helios, Liyanage, et. al. [12]) and successfully verified its real-time decoding capability on our FPGA platform. Our FPGA implementation satisfies the microsecond-level decoding latency required to address the backlog problem in scalable quantum computing [13]. Future work includes introducing weighting strategies [10] into Helios to further improve decoding accuracy and implement the design on ASIC chips, with the goal of realizing efficient and scalable QEC hardware.

## 摘要

本專題的研究著重於發展快速且具擴展性的 Surface code 硬體解碼器。Surface code (表面碼) 是一種具有高度潛力的量子錯誤更正碼 (Quantum Error Correction, QEC [1, 2])。我們首先針對量子電路 (Quantum circuit) 與表面碼的錯誤更正機制進行理論與模擬研究，涵蓋 CSS 表面碼 [1] 及 XZZX 表面碼 [3] 兩種變體。由於傳統的查表法 (Look Up Table, LUT) 解碼器在擴展性上有其局限性，我們的研究重心轉向基於圖理論的解碼策略，尤其是 Minimum-Weight Perfect Matching (MWPM [4, 5, 6]) 與 Union Find (UF [7, 8]) 演算法，並進行深入探討與實作。

我們透過模擬由 Google Quantum AI Lab 公開的 Willow 量子電腦的實驗資料集 [9, 10]，評估不同解碼演算法的效能。結果顯示，加權 Union Find (Weighted UF) 解碼器 [8, 11] 在短期內的準確性可媲美最佳化的 MWPM 解碼器 [4, 5, 6]，同時能夠顯著提升計算效率。此外，我們基於 Namitha Liyanage 等人提出的 Helios 架構 [12]，使用 Verilog 實現了改良後的 UF 解碼器，並成功在 FPGA 平台上驗證其即時 (Real-time) 解碼能力。我們的 FPGA 實作達到了微秒級的解碼延遲，有效解決量子計算中面臨的錯誤積壓 (Backlog) 問題 [13]。未來的研究方向包括在 Helios 中引入加權 (Weighting) 策略 [10]，以進一步提升解碼的準確性，並計畫將該設計實作於 ASIC 特定晶片上，期望實現更高效且更具擴展性的量子錯誤更正硬體系統。

# 1 Background / motivation 背景與動機

隨著量子電腦的高速發展，量子錯誤更正 (Quantum Error Correction, QEC) 成為推進量子電腦邁向實用化與普及的關鍵技術。然而，量子系統對環境干擾極為敏感，即使微小的噪聲也會導致量子態崩潰，使得量子運算無法順利進行。為了提升量子計算的可靠性，QEC 技術致力於在不直接測量量子資料的情況下，檢測並修正量子比特 (qubit) 上的錯誤。

在眾多錯誤更正碼中，表面碼 (Surface Code) 以其高容錯閾值 (Fault-tolerance Threshold)、只需局部操作的特性，成為當前主流的 QEC 方案。尤其是 Google Quantum AI 團隊在 2024 年推出的 Willow 晶片，展示了量子錯誤率壓低至表面碼閾值以下，標誌著量子電腦實用化的重要里程碑。

然而，表面碼的解碼器必須同時滿足高準確率、即時運算效率與可擴展性三大需求。特別是在通用量子計算中，涉及非 Clifford 閘操作時，錯誤積壓問題 (Backlog Problem) 若無法即時處理，將導致運算速度指數性下降。因此，開發一套能於微秒級別內完成解碼、且具備良好擴展性的硬體解碼器，成為本專題研究的核心動機。

此外，Look Up Table (LUT) 解碼器雖然簡單直觀，但因空間複雜度高達  $O(2^{n(n/2)})$ ，不具備實作在大型量子系統中的擴展性。因此，本專題研究聚焦於更具擴展性與高效率的圖匹配解碼演算法，特別是 Minimum Weight Perfect Matching (MWPM) 與 Union-Find (UF) 兩大類方法，並進一步探討其在硬體 (FPGA) 上的實現可能性。

## 2 Purpose 研究目的

本專題研究之主要目標為：

- 深入理解、模擬量子電路與表面碼的錯誤更正機制，包括 CSS 表面碼與 XZZX 表面碼，並製作一個查找表 (look up table) 進行錯誤更正。
- 為了達成可擴展性 (scalability)，分析並比較不同解碼演算法 (MWPM、UF [8, 11, 4, 5] 在準確率、效率與擴展性上的表現。
- 驗證 Weighted UF 與傳統 MWPM 方法在 Google Willow 資料集 [10] 上的性能差異。
- 以 Verilog 實作 UF 解碼器於 FPGA 平台上，評估其實時運算能力。
- 評估未來將 UF 解碼器升級為 Weighted UF 策略並移植至 ASIC 晶片之可行性。

## 3 Method 研究方法

### 3.1 理論研究與基礎建構

我們的專題，是先由學習量子比特、量子閘 (如 X, Y, Z, H, CNOT) 以及量子電路設計，建立量子運算與錯誤產生機制的基礎認知。接著透過 Qiskit: 一種量子電路模擬語言，進行量子電路的模擬計算及其錯誤模擬，以具體掌握量子錯誤行為與糾錯需求以及核心問題。

### 3.2 表面碼錯誤更正機制分析

了解了量子錯誤更正的重要性及其困難，我們去了解許多的錯誤更正碼，包括位元翻轉碼 (bit-flip code)、秀爾碼 (shor code)、循環碼 (repetition code)、托里奇碼 (toric code)，而我們主要詳細研究的為 CSS 表面碼與 XZZX 表面碼，因其有更高的容錯率 (約 2%)，以及其可以透過拓樸結構，使 qubits 能夠合鄰近的 qubit 進行量子閘運算 (我們稱為穩定子, stabilizer)，非常適合晶片的實做，以及其可擴展性高，所以我們選用表面碼作為我們的研究對象。而 XZZX 表面碼使用了 X 穩定子以及 Z 穩定子間隔的相交，使其有更好的穩定性及糾錯能力，包括其穩定子 (Stabilizer) 設計、糾錯流程、容錯閾值等特性，並模擬、比較不同錯誤模型下表面碼的表現。

### 3.3 解碼演算法研究

針對表面碼解碼，我們翻閱了許多論文，並深入的探討、實作以下演算法：

- 最小權重完美匹配法 Minimum Weight Perfect Matching (MWPM) [4, 5]：

這個方法的假設為，由於 qubits 之間會有錯誤關聯性，因此會有一定的機率產生錯誤，於是設定 weight 是這些錯誤關聯機率 (稱為 error rate) 的負對數 ( $-\log(\text{error rate}) = \text{weight}$ )，而越高的錯誤率會有更小的 weight，基於這個方法，可以製作出一個以最大似然方法 (maximum likelihood based method) 找到 minimum weight 的方法。通常來說，為了降低運算以及時間的複雜度，通常都只追求局部的 minimum weight；這些方法包括了 sparse blossom, fusion blossom 等方法，而這些方式恰好和表面碼 (surface code) 的鄰近運算 (local) 及其鄰近的錯誤關聯，有非常好的效果。

我們首先基於 Sparse Blossom 的方法，使用 Pymatching 進行模擬虛擬資料 (pesudo data) 的驗證，也將其應用於 google willow 的原始資料上進行錯誤更正，並且有高度穩定的糾錯能力；另外我們也研究了另一種 MWPM 的錯誤更正演算法: Fusion Blossom 的糾正錯誤能力。

- Union-Find (UF) Decoder [7, 14, 8]：由於表面碼對於每一個存儲資訊的量子位元 (data qubit) 的量測次數都會是 2 次，因此只要有量子位元發生翻轉的錯誤，都會有成對的錯誤產生，因此結合了資料結構中的 union & find 的演算法，將拓樸結構上的錯誤映射到圖 (graph) 上，再使用 union find 連結錯誤。

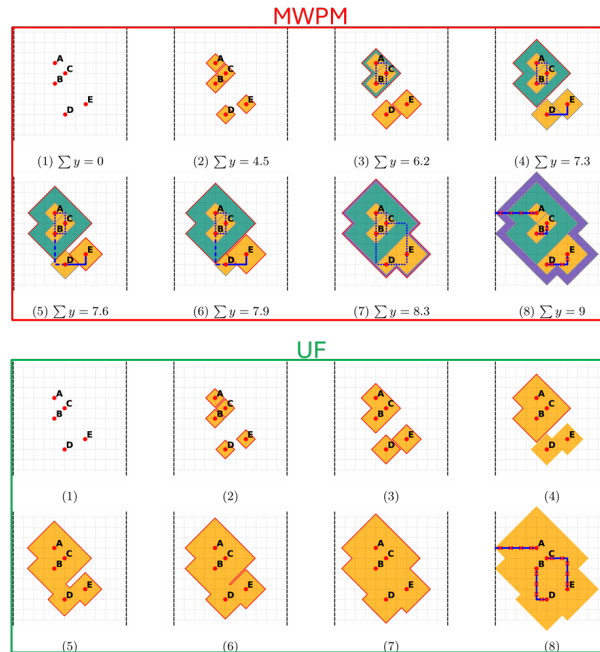


Figure 1: Step by step figure for MWPM and UF [14]

### 3.4 Google Willow 資料集 [10] 驗證

- 資料解讀與轉換: 由於 Google [10] 以一種特殊的資料形式 (.b8) 的去儲存資料，其中 README 僅說明檔案結構，因此需要自行推敲資料形式並使用 Stim、python 與 C 語言轉換成通用語所需格式。
- 解碼模擬: 我們使用 python 以及 Stim 語言，使用 MWPM [4] 與 weighted UF [11] 兩種解碼演算法對測量結果進行解碼，並比較其在 Willow 的原始數據上邏輯錯誤率表現。
- 嘗試復現: 我們在 Google 的 README [10] 與論文 [9] 中發現 Google 在長達數天的量子資訊記憶實驗中使用一種特殊的更正演算法，由於 Google 並沒有公布該演算法的參數細節。這引發我們的好奇，於是嘗試復現該解碼 (重新調整權重 Reweighting [10]) 策略。

### 3.5 硬體實作與驗證

- Verilog 模擬: 改寫並調整 Helios [12] 的 UF 解碼器以在 PC 上進行模擬。我們調整 Helios 的參數以匹配作為 syndrome 輸入的 Willow 公布的測量資料。
- FPGA 實作與驗證: 調整 Helios 的時序邏輯以利將其實現於 ZCU106 FPGA 上進行功能測試與驗證。
- 模組同步: 調整儲存資料的 BRAM 模組與 Helios 解碼器本體之間所需的延遲與輸入同步問題，使得兩者能夠配合運作。

## 4 Results 研究結果

### 4.1 Willow 晶片原始資料驗證成果

- 我們將其原始資料 [10] 進行 2 種解碼方式 (MWPM 的 sparse blossom [5] 以及 Weighted Union Find) [4, 11]，並且加上比對 google willow 的原始資料，並且也針對 google 的長時間特定電路上某一種未公布的解碼方法嘗試進行復現。
- 我們的研究也探討了 UF 與 Weighted UF，並分析其時間複雜度及硬體實作潛力，也做了模擬的資料驗證。而後也將此演算法使用於 google 的 willow 晶片的原始資料；結果顯示在長時間的 Quantum error 高於 UF 的 decoding threshold，但是在短時間 general 的狀態則低於 decoding threshold，並且可以與 Google 未公開的 decoding method 相媲美。

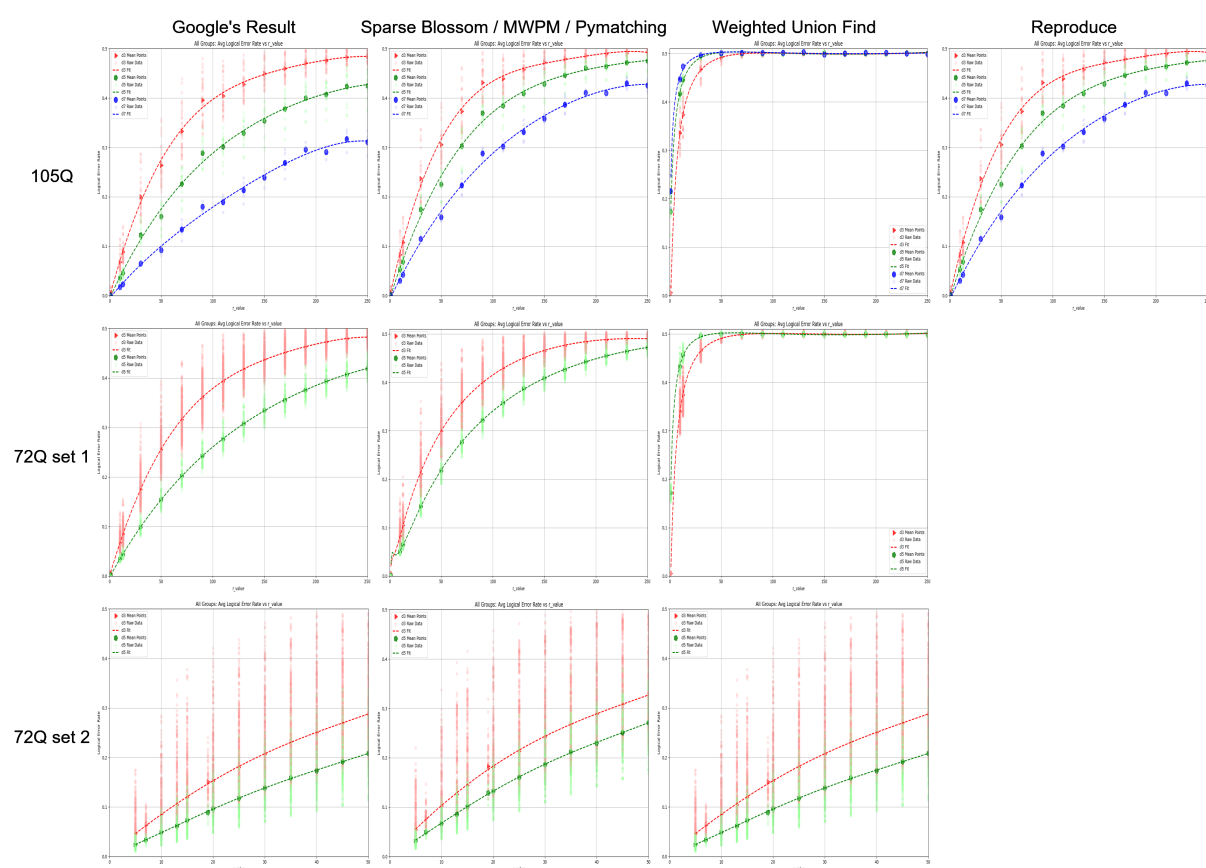


Figure 2: Comparing of datasets and decoders performance

### 4.2 FPGA 實作成果

- 將 UF Decoder 實作於 ZCU106 FPGA。
- 測得解碼延遲為  $0.376\mu s$ ，符合應對錯誤堆積問題所需的微秒級標準。
- 模擬與硬體實測結果一致，證明設計之正確性與效能。

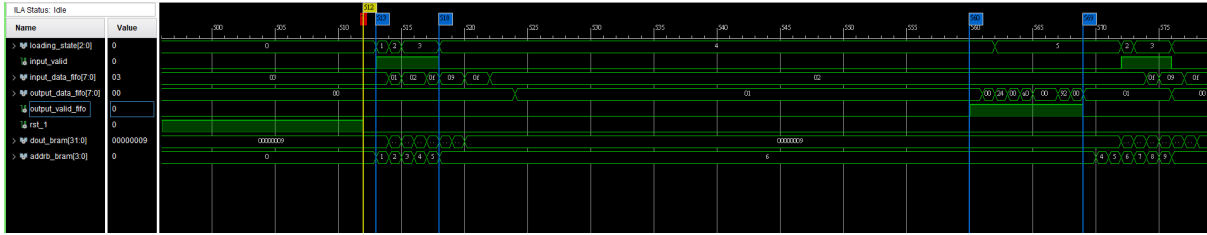


Figure 3: The output result of Helios [12] on FPGA, monitored by ILA

### 4.3 可擴展性分析

- UF 解碼器的時間複雜度隨量子比特數量線性擴展，適合大規模系統。
- 實現於 FPGA 強化未來推進至 ASIC 硬體可行性。

## 5 Conclusion 總結

本專題從量子電路的概念出發，並且由此理解錯誤更正的理論並進行模擬，逐步建立起以表面碼為核心的硬體解碼技術。而後了解演算法、驗證模擬資料 (pseudo data)，再經由 Willow [10, 9] 的原始資料驗證以及分析，最後使用 Helios [12] 針對 UF 演算法的硬體實踐，實作於 FPGA 上，驗證 Willow 晶片的資料，完成了具有可擴展性 (scalability)、實時 (real-time)、硬體友善 (hardware-friendly) 並且具有實際功能的量子糾錯演算法。

這樣的實測結果證明，基於 UF 演算法的 FPGA 解碼器能夠滿足未來量子電腦微秒級即時錯誤更正的要求，若未來量子位元的錯誤率持續下降，這項方法將可以應用在長時間的運算上，並且具有高度的應用價值。

未來展望包括：

- 引入並復現重加權策略以提升準確率以及長期解碼性能。
- 將設計推進至 ASIC 晶片以降低功耗、延遲並且強化可擴展性。

透過本研究成果，我們相信未來實現真正可擴展、可商用之通用量子電腦將更為可期。

## 6 Reference

- [1] Austin G Fowler et al. “Surface codes: Towards practical large-scale quantum computation”. In: *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics* 86.3 (2012), p. 032324.
- [2] Barbara Maria Terhal. “Quantum error correction for quantum memories”. In: *Reviews of Modern Physics* 87 (2013), pp. 307–346. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:118646257>.
- [3] J Pablo Bonilla Ataides et al. “The XZZX surface code”. In: *Nature communications* 12.1 (2021), p. 2172.
- [4] Oscar Higgott. “Pymatching: A python package for decoding quantum codes with minimum-weight perfect matching”. In: *ACM Transactions on Quantum Computing* 3.3 (2022), pp. 1–16.

- [5] Oscar Higgott and Craig Gidney. “Sparse blossom: correcting a million errors per core second with minimum-weight matching”. In: *Quantum* 9 (2025), p. 1600.
- [6] Yue Wu and Lin Zhong. “Fusion blossom: Fast mwpm decoders for qec”. In: *2023 IEEE International Conference on Quantum Computing and Engineering (QCE)*. Vol. 1. IEEE. 2023, pp. 928–938.
- [7] Nicolas Delfosse and Naomi H Nickerson. “Almost-linear time decoding algorithm for topological codes”. In: *Quantum* 5 (2021), p. 595.
- [8] Yue Wu, Namitha Liyanage, and Lin Zhong. “An interpretation of union-find decoder on weighted graphs”. In: *arXiv preprint arXiv:2211.03288* (2022).
- [9] Rajeev Acharya et al. “Quantum error correction below the surface code threshold”. In: *arXiv preprint arXiv:2408.13687* (2024).
- [10] Google Quantum AI. *Data for “Quantum error correction below the surface code threshold”*. Version 1.0.0. Zenodo, Aug. 2024. DOI: 10 . 5281 / zenodo . 13273331. URL: <https://doi.org/10.5281/zenodo.13273331>.
- [11] Oscar Higgott et al. “Improved decoding of circuit noise and fragile boundaries of tailored surface codes”. In: *Physical Review X* 13.3 (2023), p. 031007.
- [12] Namitha Liyanage et al. “Scalable quantum error correction for surface codes using FPGA”. In: *2023 IEEE International Conference on Quantum Computing and Engineering (QCE)*. Vol. 1. IEEE. 2023, pp. 916–927.
- [13] “Suppressing quantum errors by scaling a surface code logical qubit”. In: *Nature* 614.7949 (2023), pp. 676–681.
- [14] Yue Wu, Namitha Liyanage, and Lin Zhong. “An interpretation of union-find decoder on weighted graphs”. In: *arXiv preprint arXiv:2211.03288* (2022).

## 7 Review and Reflections 心得感想

這個專題有很多的困難，最令我們印象深刻的是，Google Quantum AI Lab 公布的資料既無註解亦不附教程，因此我們必須學習全新的程式語言:Stim 並配合 Python 才能解讀 Willow 的資料。其次，QEC 雖有大量的資料與論文卻並無適合新手研究者的教程，篩選、自學與研究的過程花了很多時間。經過數個月的持續鑽研，我們終於熟悉了 Google 與產業界的量子錯誤更正架構。最後，這個領域的論文經常沒有開源，或者公認的 benchmark 與詳細的優劣比較，這無疑花費我們不少時間以研讀論文並篩選及應用量子錯誤更正演算法，最有趣的是我們發現 Google 在論文上的數據相較於其公布的資料表現更佳，他們還使用了一些不為人知的方式減少其錯誤率。

透過這個專題，我們學會了團隊協作必不可少的精準溝通與表達，比如我們每週都要跟國外教授每週開會，分別是星期二早上八點到九點半、下午三點半到五點半還有星期三的早上十一點到十二點，這讓我們學會了怎麼使用英文跟國外的教授們溝通，精確的表達困難與重點，以發現問題、找到下一步要做的重要的事情。再來我們學習了要如何維護自己程式的版本，保證程式碼的可維護性以及可讀性使得團隊成員能了解彼此的程式碼對於團隊極為重要。更有甚者，QEC 是我們實驗室開展的新領域，有來自不同學習背景、不同時間開始學習的同學們開展合作與研究，理解雙方對某個主題的知與不知並勇敢發問、熱心解答、辯論而不爭吵乃是我們重要的修養。

此外，特別感謝指導教授張鑑元老師在量子錯誤糾正與解碼器理論的指導、研究資源方面不遺餘力的支持與鼓勵，以及對我們進度的監督與研究方向的建議，更時常關心我們的生涯與未來發展，讓我們在專題中感受到做研究的困難與溫暖。另外感謝哥斯大黎加大學 (UCR) 的 Mauricio Gutiérrez 教授 (UCR) 在量子錯誤糾正的教學與洞見幫助我們避免失誤與省下自行探索的時間，與高能加速器研究機構 (KEK) 的賴昶樞教授關於 FPGA 的指導與協助，我們在通訊協定的方面尤其獲益良多。最後感謝耶魯大學 (Yale University) 的 Namitha Liyanage 博士慷慨分享他們開發的 Helios 並回答我們關於 Helios 的問題與設定參數等，這位後來的改進提供莫大的幫助。

總得來說，本專題的主題跨越了許多領域。不僅需要理解量子的特性，還要有統計、資料結構、演算法、錯誤更正碼、機器學習、數位邏輯與 FPGA 的知識，這要求許多心力自行調查與研究。透過這個專題，我們培養了從課本到實踐的能力，還有如何把外在零散的資料和論文變成自己的知識圖譜，還有如何在每周報告的時候將我們要溝通的事情精準地傳達給教授及隊友，這養成了我們專心準備會議的態度。另外我們也很幸運地受到許多老師長期的指導與協助，這培養了我們各方面的能力，獲益良多。

P.S. 另外特此感謝張鑑元教授於 2025/1/10 請我們吃台北轉運站旁邊的 Oldies Burger (<https://maps.app.goo.gl/11XtPA8vewjtHYtV6>)