

國立清華大學 電機工程學系
實作專題研究成果摘要

**Verifying the feasibility of numerical
approximation with Taylor's series on
the nonlinear Mach-Zehnder Modulator
(MZM) transfer function**

**Mach-Zehnder Modulator 非線性效應
之數值逼近法模擬驗證**

專題領域：通訊領域

指導老師：馮開明 教授

組別：B360

成員：賴柏睿、籃堅峰

研究期間：112 年 3 月至 112 年 12 月止，共 9 個月

1. Abstract

As the demand for data transmission in wireless communication increases, we may move from 5G (fifth generation) to 6G (sixth generation) communication, and the THz communication system is the core concept of 6G. Therefore, it is essential to model each component in the THz communication system to predict and improve the performance of the system. In this paper, we will construct an efficient model to discuss the nonlinear effect of the transfer function of MZM, which is an essential component of the fiber-optic THz communication system. Besides, we will also test the feasibility of this model.

2. 中文摘要

由於近年來，無線行動通訊傳輸量需求大增，現行第五代行動通訊(5G 行動通訊)已逐漸不敷所求，因此在下一個十年裡，我們將邁入第六代行動通訊(6G 行動通訊)，以滿足科技之發展。而在 6G 行動通訊裡，太赫茲通訊系統(THz Comm)是最重要的核心概念，因此，針對太赫茲通訊系統裡各個元件建構出良好的數學模型，能夠使我們未來在發展 6G 行動通訊時更加的有效率。Mach-Zehnder Modulator (MZM)，作為太赫茲光纖通訊系統中的電轉光調變器，本研究對其建構出一個計算非線性效應更有效率之數學模型，並且使用 MATLAB 軟體進行數值模擬，驗證此數學模型之可行性，以便未來發展光纖通訊時的測量以及評估。

3. 研究動機

當初在實驗室和學長們一起操作太赫茲光纖通訊系統時，每次開始運作都有一個非常重要的步驟，就是需要調整 MZM 的輸出功率，使 MZM 轉換函數接近線性，於是我們便想，若是針對 MZM 建立一個良好的數學模型來討論非線性效應，在未來我們便能夠利用數學推導來在理論上操作系統，直接利用數學運算預測結果，這將會是未來發展更龐大的數學理論時，非常有利的一個參考資訊。

4. 研究目的

由於 MZM 在太赫茲光纖通訊系統內，占了非常重要的一個角色，因此若能夠以較為簡單的數學模型來討論 MZM 的非線性效應，對於我們在發展太赫茲光纖通訊系統時，能夠更加有利，並且未來在建立更複雜的通訊系統理論時，藉由 MZM 之數學模型，我們能夠更快的預測出想要的結果，以及計算上效率更高。

5. MZM 轉換函數推導

MZM 作為一個太赫茲光纖通訊系統裡關鍵的元件，建立 MZM 的數學模型能夠讓我們未來對於太赫茲光纖通訊系統的計算以及估測更加有效率，而目前已知的 MZM 理想轉換函數可以寫成下面的形式：

$$E_{out} = \frac{E_{in}}{2} \left(1 + \exp \left(j \frac{r(t) - V_{bias}}{V_{\pi}} \pi \right) \right) \quad (1)$$

式(1)中， E_{in} 和 E_{out} 分別代表輸入和輸出訊號的電場， V_{bias} 是加在 MZM 上的直流偏壓(DC bias)， V_{π} 為半波電壓(half wave voltage)。然而上面式子是在理想的狀態下，現實情況往往需要考慮一些人為和環境的干擾因素。在本研究中，我們考慮直流偏壓的漂移(V_s)，以及兩路光束之功率不平衡(U_b)，兩個主要的干擾因子，因此式(1)可以寫成

$$\frac{E_{out}}{E_{in}} = \frac{1}{2} (1 + U_b + (1 - U_b) \exp \left(j \frac{r(t) - V_{bias} - V_s}{V_{\pi}} \pi \right)) \quad (2)$$

然而式(2)是電場轉換函數的表達式，真正應用在系統時，我們是在強度場(Intensity field)上做運算，記 $I_{out} = |E_{out}|^2$ ， $I_{in} = |E_{in}|^2$ ，因此，我們可以從式(2)推得

$$\frac{I_{out}}{I_{in}} = \frac{E_{out}}{E_{in}} \times \left(\frac{E_{out}}{E_{in}} \right)^* = \frac{1}{2} \left((1 + U_b^2) + (1 - U_b^2) \left(\cos \left(\frac{r(t) - V_{bias} - V_s}{V_{\pi}} \pi \right) \right) \right) \quad (3)$$

得到了一個非線性轉換函數，然而轉換函數的非線性效應對於分析系統表現時，一直都是一個令人頭痛的問題，於是我們對式(3)做泰勒級數展開，得到下面式子：

$$\frac{I_{out}}{I_{in}} = \frac{1}{2} \left\{ (1 + U_b^2) + (1 - U_b^2) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{r(t) - V_{ope}}{V_{\pi}} \pi \right)^{2n} \right] \right\} \quad (4)$$

在式(4)中，為了簡化表示，我們將 $V_{bias} + V_s$ 寫作 V_{ope} 。經過泰勒級數展開之後，我們可以得到一個線性項(一次項)，和許多非線性項(大於等於2之高次項)。

6. 非線性效應之數學模型建構

有了式(4)，我們就可以對其進行非線性效應的討論，我們使用 MATLAB 模擬光纖通訊系統，傳送不同峰對峰電壓值(peak-to-peak voltage，記為 Vpp)之正弦波，測試 MZM 轉換函數之各次項對於非線性效應之影響程度，得到下圖模擬結果：

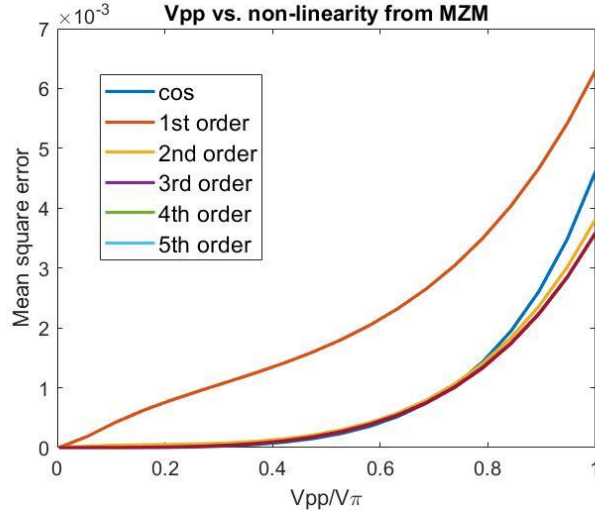


圖 2. 不同次項泰勒級數對於非線性效應之影響

這裡的 mean square error 指的是模擬之數學模型輸出和實際正弦波差異平方的平均，從模擬結果圖中，肉眼就可以觀察到 MZM 轉換函數在模擬到高於二次項時，非線性效應之表現就已經非常的相似。於是有了初步的假設，當我們討論 MZM 轉換函數之非線性效應時，只需要討論到第二階非線性項即可，於是式(4)可以被簡化為

$$\frac{I_{out}}{I_{in}} = \frac{1}{2} \left\{ (1 + U_b^2) + (1 - U_b^2) \sum_{n=0}^2 \left[\frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{r(t) - V_{ope}}{V_{\pi}} \pi \right)^{2n} \right] \right\} \quad (5)$$

若此數學模型的可行性被成功驗證，那未來在討論非線性效應時，計算複雜度將會被顯著的減少，將有利於系統的評估和模型化。

7. 數學模型可行性驗證

為了驗證此模型之可行性，我們使用 MATLAB 模擬真實情況的 MZM 轉換函數和簡化後的版本，並模擬傳送 OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) 訊號經過兩種轉換函數。

在現實狀況中，MZM 的半波電壓(V_{π})為 3V，因此輸出橫軸的部分是照現實狀況設定 V_{pp}/V_{π} 為 $V_{pp}/3$ ，下兩圖為 OFDM 訊號之 V_{pp} 在 0.8 時，從真實的 MZM 轉換函數輸出之波形，以及數值逼近之 MZM 轉換函數之輸出波形，可以看到這兩者各個峰值分布的位置都非常相近，這也說明了兩者輸出的波形相似。

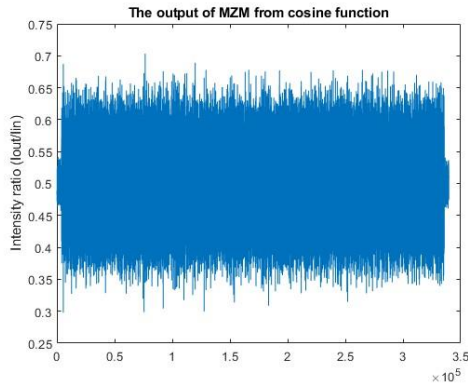


圖 5. 原 MZM 輸出之 intensity ratio 波形

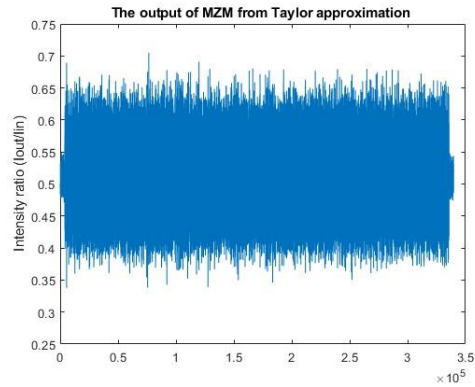


圖 6. 泰勒級數近似之 MZM 輸出 intensity ratio 波形

為了進一步的驗證兩者的相似性，我們將數值逼近的 MZM 轉換函數輸出波形減掉真實的 MZM 轉換函數輸出波形，理論上，若相減之後的波形趨近於 0，代表兩者的相似度就越高，下圖為相減後的波形圖：

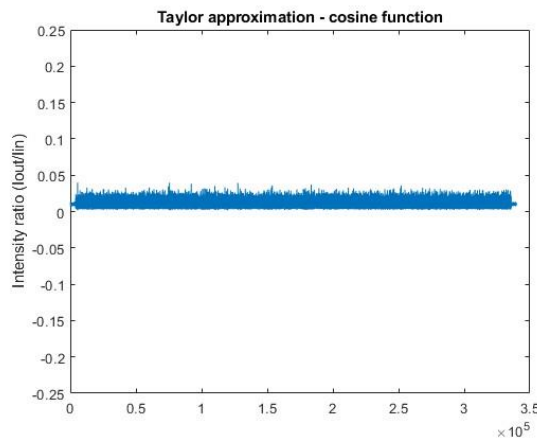


圖 7. 泰勒級數近似 MZM 轉換函數減掉原 MZM 轉換函數波形

單就整體振幅而言，可以觀察到兩者相減的波形非常的扁平，對於兩個擁有如此密集的波峰與波谷的波形，只要某一個波峰和波谷錯位，相減後便會產生極大的波峰出來，然而我們所輸出之波形卻是如此的扁平，意味著兩者的相似度非常高。

從這張圖中，我們可以觀察到另一個現象，模擬到第二項泰勒級數的 MZM 轉換函數似乎整體較原轉換函數的輸出波形高了一些，參照式(4)，就可以注意到由於 cosine 函數的泰勒級數展開的次方項都是偶數，意思是說泰勒級數加到奇數項會是負的，加到偶數項又會變回正的，如此一正一負的震盪，最後逐漸收斂，因此若我們只模擬到第二項，那整體波形就會產生上飄的效果，然而這部分可以靠調整直流偏壓來解決此問題，因此我們只需要考慮兩個波形對於各自直流成分(DC component)的上下分散程度即可。

而為了量化兩者波形的差異，我們將原轉換函數之振幅資料點的標準差設為 σ_0 ，泰勒級數近似之 MZM 轉換函數和原轉換函數相減後的波形振幅資料點

之標準差設為 σ_s ，並用下面公式計算兩者波形之差異值

$$difference = \frac{\sigma_s}{\sigma_o} \times 100\% \quad (6)$$

這邊使用標準差的原因是由於 $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$ 去掉直流成分之後，單位和波形資料點成平方倍，為了使扣掉直流成分之後的單位和原本資料點一致，因此將變異數開根號取標準差，並以標準差量化兩者差異程度。

我們測量峰對峰電壓值(Vpp)在 0.05 到 1 之間的 OFDM 訊號，觀察分別經過兩種 MZM 轉換函數後的輸出結果差異度。

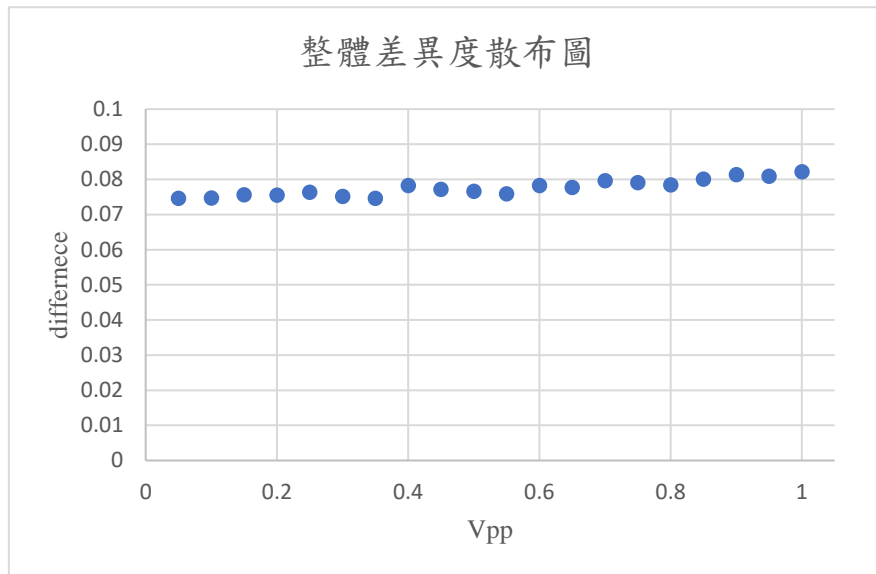


圖 7. 不同 Vpp 對差異度散布圖

Vpp (V)	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
Difference	7.46%	7.47%	7.56%	7.55%	7.64%	7.51%	7.46%	7.83%	7.72%	7.67%
Vpp (V)	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1
Difference	7.59%	7.83%	7.77%	7.96%	7.90%	7.84%	8.00%	8.14%	8.09%	8.21%

表 1. 各 Vpp 對應到之差異度

由上表可以看到，泰勒級數近似的輸出波形和原波形差異度都大約在 8% 以下，而對於實驗架構的太赫茲光通訊系統運作而言，通常峰對峰電壓值也不會到 1V 附近，當然更高的 Vpp 值就不需要納入考量，因此整體而言，對於計算系統表現上，是在容許誤差範圍內，證實了使用此種數值逼近法來討論 MZM 轉換函數的非線性效應是可行的。

8. 結論

從 MATLAB 的數值模擬結果，由於二階泰勒級數以上之非線性效應的表現都極為相似，我們得出當計算 Mach-Zehnder Modulator 之非線性效應時，只

需要使用到第二階泰勒級數近似，就能夠取得足夠精確的結果。

藉由傳送 OFDM 訊號，通過數值近似解的 Mach-Zehnder Modulator 和原本的 Mach-Zehnder Modulator，我們也成功地驗證了此一數學模型的可行性，這項研究讓我們得以在計算複雜度以及精確度上，得到一個良好的權衡，對於將來在計算系統表現，以及建立更複雜的通訊系統模型時，能夠擁有更好的效率，也對於發展第六代行動通訊系統時有所助益。

未來希望能夠直接使用太赫茲光纖通訊系統實作，實際傳送真實訊號，獲得更有公信力的數據及成果，將研究更進一步的深入探討，也能夠二次確認我們現階段完成的結果。

9. 參考文獻

- [1] T. S. Rappaport, “Wireless Communications and applications Above 100GHz: Opportunities and Challenges for 6G and beyond” Vol.7 IEEE (2019).
- [2] Sander Vervoort, Yannick Saalberg and Marcus Wolff, “Mach-Zehnder Modulator Output in Time and Frequency Domain-Calculation and Experimental Confirmation” MDPI Photonics 2023, 10(3), 337.
- [3] Tawfig Eltaif, Khaled A. Alaghbari, Naif Alsowaidi and Belal A. Hamida, “mm-wave Generation Using Unbalanced Mach-Zehnder Modulator and Optical Frequency Comb Source for DWDM Optical Network” . Paper presented at 2021 26th IEEE Asia-Pacific Conference on Communications (APCC), Kuala Lumpur, Malaysia.
- [4] Ruirui Gao, Jingjing Hu, Jian Li, Jiali Zhang, Qianxue Liu, Xiaozhou Li, Xiuyou Han, Mingshan Zhao and Yiying Gu (October 2021). “Arbitrary Waveform Generation Technology Based on Dual-polarization Dual-drive Mach-Zehnder Modulator” Paper presented at 2021 Asia Communications and Photonics Conference (ACP), Shanghai, China.
- [5] Yi Li, Rujian Lin, Yingchun Li and Jiajun Ye (December 2009). “Bi-directional mm-wave radio-over-fiber system based on OFM and modulated by OFDM” . Paper presented at IET International Communication Conference on Wireless Mobile and Computing (CCWMC 2009), Shanghai, China.
- [6] Yang Jing Wen, A. Nirmalathas, Dong-Soo Lee (2004). “RZ/CSRZ-DPSK and chirped NRZ signal generation using a single-stage dual-electrode Mach-Zehnder modulator”. IEEE Photonics Technology Letters (Volume: 16, Issue: 11, November 2004). DOI: 10.1109/LPT.2004.834892

10. 心得

在專題的一開始，指導老師帶領我們研讀學術論文，一步一步慢慢了解未來第六代行動通訊的架構，從第六代行動通訊可能會遇到的困難，到預期會有怎樣的成果，而這也是我們首次研讀學術論文，剛接觸到上萬字英文的論文時，經常會不知所措，不知道從何處開始啃起，可能花了一整天也只是讀完 introduction，但隨著我們讀的論文越來越多篇，也就漸漸地掌握研讀論文的技巧，並且能夠快速地掌握到重點。這對於我們未來不管是在碩、博班做學術研究，或者未來自我進修時，都是一個非常重要的技能。

到了中期的時候，開始進入實驗室，接觸到價值高昂精密儀器，以及學長姐辛苦累積而成的太赫茲光纖通訊系統，這也是我們上大學以來，首次操作實驗課以外的器材，這個時段非常感謝通訊所的富凱學長，當初是他帶著我們熟悉系統每一個部份的操作，以及講解系統各個元件的運作原理，並且我們遇到困難時，富凱學長都會不厭其煩的指導我們，讓我們實作專題的中期能夠逐漸找到研究方向。

到了後期，研究方向大致上有了雛形，我們也開始著手進入最後階段的研究，每天就是在電腦前寫 MATLAB，跑模擬，看模擬結果，這個時段經常會遇到瓶頸期，好在學長和指導老師總是能夠提供許多有用的的建議，並且每個禮拜組員間互相合作共度難關，才能夠在最後產出良好的成果。

整個實作專題所學到最寶貴的事情莫過於團隊合作的重要性，每當一人埋頭苦幹時，往往會有一些思考盲點，而造成進度的卡關，然而團隊多人一起合作的話，總是能夠獲得更加客觀的想法，擺脫當局者迷的窘境，另外也非常感謝指導老師總是能夠不厭其煩地耗費心力指導我們，並且和我們講述許多業界生存法則和做學問的方法，讓我們學習到了許多課本上沒有的知識，此次實作專題獲益良多，是大學四年裡最寶貴的經驗之一。